# 経路積分と量子解析

いかにして量子現象を数理的に扱うか

## 第12回

# 量子解析 (3)

### 量子微分方程式によるBCH公式の再考

鈴木 増雄

## 12.1 はじめに

今回は，量子的関数（すなわち非可換演算子の関数）の微分方程式をわざわざ作り，この微分方程式の構造から，もとの量子的関数の特性を知る方法を説明する．その典型的な例として，いくつかの指数演算子の積を一つの指数演算子にまとめるBCH公式[1)]を，この量子微分方程式を用いて簡潔に導く方法などを解説する．この新しい方法が従来の方法と比べて，いかに有効であるかを示す．

## 12.2 抽象的思考と具体的解法—その分離と統合

数学の命題の中には，方程式の解の存在定理のように解法そのものにはふれずに解の存在だけを証明するという極めて抽象性の高いものが多い（$n$ 次整方程式は $n$ 個の解を持つという代数学の基本定理は整関数論の美しい定理の一つである．しかし，具体的な解法は一般には4次方程式までである）．このように概念的に見事な定理は，サイエンスの応用の面でもまた極めて重要である．これは，厳密解は求まらない場合でも近似解を求める指針を与えてくれる．

ここで取り扱う指数演算子の例で言えば，BCH公式がその典型的な美しい命題である[1)]．すなわち，互いに非可換な演算子 $\{A_j; j=1,2,\cdots,r\}$ に対して，次のように，指数積を一つの指数演算子

$$\mathrm{e}^{A_1}\mathrm{e}^{A_2}\cdots\mathrm{e}^{A_r}=\mathrm{e}^{\Phi} \qquad (12.1)$$

にまとめると，「$\Phi$ は，$(A_1+A_2+\cdots+A_r)$ に加えて，$\{A_j\}$ の交換子の線形結合で表される」ことが数学的な背理法で証明されている[1)]．従来は，補遺で示すように，この定理を頼りに，式 (12.1) の左辺を $\{A_j\}$ に関して強引に展開し，それらを次数の低い項からDSW定理を用いて交換子に書き直していた．

これから説明する「量子微分方程式の方法」は，BCH の線形性の定理も，具体的表式を一般的に与えることによって，同時に示すことができる．これは，言わば，「抽象的思考と具体的解法の統合」である．

## 12.3 量子微分方程式の方法（量子解析[2~6]）

式 (12.1) のような代数的な関係式によって定義される演算子 $\Phi$ の特徴をうまく捉えたあらわな表式を求める一つの方法は，演算子 $\Phi$ に関する，(12.2) のような微分方程式を導き，それを解くことである．そのために，パラメータ $x$ の関数演算子 $A_1(x), \cdots, A_r(x)$ を考え，演算子 $\Phi(x)$ はこれらの演算子の関数で表されるものとする．

一般に，$\Phi(x)$ の $x$ に関する微分が，内部微分 $\delta_{\Phi(x)}, \delta_{A_1(x)}, \cdots, \delta_{A_r(x)}$ の関数を演算子 $\{B_j; j=1, \cdots, r\}$ に作用させた形

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \sum_{j=1}^{r} f_j(\delta_{\Phi(x)}; \delta_{A_1(x)}, \cdots, \delta_{A_r(x)})\ B_j(x) \tag{12.2}$$

に表される状況を考える．ただし，$\{B_j(x)\}$ は $\{A_j(x)\}$ または $\{dA_j(x)/dx\}$ である．これを一般に「量子微分方程式」と呼ぶことにする．式 (12.2) の右辺に現れる内部微分は一種の量子微分である．

量子微分方程式 (12.2) の一般的解法などは，まだ開発されていないが，例えば，$\Phi(x)$ が条件式

$$\mathrm{e}^{A_1(x)}\mathrm{e}^{A_2(x)} \cdots \mathrm{e}^{A_r(x)} = \mathrm{e}^{\Phi(x)} \tag{12.3}$$

で与えられるときのように，内部微分 $\delta_{\Phi(x)}$ が $\{\delta_{A_j(x)}\}$ を用いて表される場合には，式 (12.2) は

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \sum_{j=1}^{r} f_j(\{\delta_{A_j(x)}\}) B_j(x) \tag{12.4}$$

のような，より簡単な量子微分方程式に変換される．これは，容易に積分することができて，

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{r} \int_{x_0}^{x} f_j(\{\delta_{A_j(t)}\}) B_j(t) dt + \Phi(x_0) \tag{12.5}$$

となる．したがって，$\Phi(x)$ が量子微分方程式 (12.4) をみたすことがわかれば，$\Phi(x) - \Phi(x_0)$ は交換子の線形結合で表されることが問題の具体的な解き方と同時に示される．

実際，条件式 (12.3) の場合には，$\delta_{\Phi(x)}$ は $\{\delta_{A_j(x)}\}$ で表されることが次のように示される[4]．

**公式 12.1**　条件式 (12.3) の下に，内部微分 $\delta_\Phi$ と $\{\delta_{A_j}\}$ の間に，次の関係式が成り立つ：

$$\mathrm{e}^{\delta_\Phi} = \mathrm{e}^{\delta_{A_1}}\mathrm{e}^{\delta_{A_2}} \cdots \mathrm{e}^{\delta_{A_r}}. \tag{12.6}$$

ただし，内部微分 $\delta_A$ は任意の演算子 $Q$ に対して，次の式をみたす．

$$\delta_A Q = [A, Q] = AQ - QA \quad \text{および} \quad \mathrm{e}^{\delta_A} Q = \mathrm{e}^A Q \mathrm{e}^{-A}. \tag{12.7}$$

**証明**　任意の演算子 $Q$ に対して，次式が成り立つことより明らかである（パラメータ $x$ は省略した）：

$$\begin{aligned} e^{\delta_\Phi}Q &= e^{\Phi}Qe^{-\Phi} \\ &= e^{A_1}e^{A_2}\cdots e^{A_r}Qe^{-A_r}\cdots e^{-A_2}e^{-A_1} \\ &= e^{A_1}(e^{A_2}(\cdots(e^{A_r}Qe^{-A_r})\cdots)e^{-A_2})e^{-A_1} \\ &= e^{\delta_{A_1}}e^{\delta_{A_2}}\cdots e^{\delta_{A_r}}Q. \end{aligned} \tag{12.8}$$

## 12.4 量子微分方程式による BCH 公式の導出

式 (12.3) で与えられる演算子 $\Phi(x)$ を $\{A_j(x)\}$ の交換子の線形結合で表す公式が BCH 公式である[1]．それを導くため，式 (12.3) の両辺を $x$ で微分すると，

$$\frac{de^{\Phi(x)}}{d\Phi(x)}\cdot\frac{d\Phi(x)}{dx} = \sum_{j=1}^{r} e^{A_1(x)}\cdots\left(\frac{d}{dx}e^{A_j(x)}\right)\cdots e^{A_r(x)} \tag{12.9}$$

となる．ここで，量子微分の公式[2~5]

$$\frac{de^{\Phi(x)}}{d\Phi(x)} = e^{\Phi(x)}\Delta(-\Phi(x)) = e^{\Phi(x)}e^{-\delta_{\Phi(x)}}\Delta(\Phi(x)) \tag{12.10}$$

および

$$\Delta(A) = \frac{e^{\delta_A}-1}{\delta_A} \tag{12.11}$$

を用いると，式 (12.9) は，

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{1}{\Delta(-\Phi(x))}\times e^{-\Phi(x)}\sum_{j=1}^{r} e^{A_1(x)}\cdots\left(\frac{d}{dx}e^{A_j(x)}\right)\cdots e^{A_r(x)} \tag{12.12}$$

と書ける．さらに，条件式 (12.3) の逆演算の公式

$$e^{-\Phi(x)} = e^{-A_r(x)}\cdots e^{-A_2(x)}e^{-A_1(x)} \tag{12.13}$$

を用いると，式 (12.12) は

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(x)}{dx} &= \frac{1}{\Delta(-\Phi(x))}\sum_{j=1}^{r} e^{-A_r(x)} \\ &\quad\times\left(\cdots e^{-A_{j+1}(x)}\left(e^{-A_j(x)}\frac{de^{A_j(x)}}{dx}\right)\cdots e^{A_{j+1}(x)}\cdots\right)e^{A_r(x)} \\ &= \frac{1}{\Delta(-\Phi(x))}\sum_{j=1}^{r} e^{-\delta_{A_r(x)}}\cdots e^{-\delta_{A_{j+1}}}\left(e^{-A_j(x)}\frac{de^{A_j(x)}}{dA_j(x)}\cdot\frac{dA_j(x)}{dx}\right) \end{aligned} \tag{12.14}$$

となる．ここで，再び公式 (12.7) を用いた．さらに量子微分の公式 (12.10) と (12.11) を用いると，式 (12.14) は

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{1}{\Delta(\Phi(x))}\sum_{j=1}^{r} e^{\delta_{A_1(x)}}\cdots e^{\delta_{A_{j-1}(x)}}\Delta(A_j(x))\frac{dA_j(x)}{dx} \tag{12.15}$$

と変換され，これは，量子微分方程式 (12.2) の形になっている．さらに，$\Delta(\Phi(x))$

は $\{\delta_{A_j(x)}\}$ で表され, 式 (12.15) は式 (12.4) の形になる．したがって, 式 (12.15) を積分することにより，$\Phi(x)$ は次のように表される[4)]．

**公式 12.2**　条件式 (12.3) で定義される演算子 $\Phi(x)$，すなわち $\Phi(x) = \log (e^{A_1(x)} \cdots e^{A_r(x)})$ は，次式で表される：

$$\Phi(x)=\sum_{j=1}^{r}\int_0^x \frac{\log(e^{\delta_{A_1(t)}}\cdots e^{\delta_{A_r(t)}})}{e^{\delta_{A_1(t)}}\cdots e^{\delta_{A_r(t)}}-1}\times e^{\delta_{A_1(t)}}\cdots e^{\delta_{A_{j-1}(t)}}\Delta(A_j(t))\frac{dA_j(t)}{dt}dt. \tag{12.16}$$

この公式は，まず第 1 に，背理法により証明された「$\Phi(x)$ は交換子の線形結合で表される」という BCH 定理を自動的に導いている．第 2 に，BCH 公式の一般項を与えている．特に，$A_j(t) = tA_j$ とおけば，従来の DSW 定理の活用による面倒な計算により導出した結果を具体的に再現していることがわかる (補遺参照)．すなわち，一般公式 (12.16) を，$A_j(x) = xA_j$ とおき適用して，$\Delta(tA_j)A_j = A_j$ に注意すると，次の公式が得られる[4)]．

**公式 12.3**　演算子 $\Phi(x) = \log(e^{xA_1} \cdots e^{xA_r})$ は次式で与えられる：

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \sum_{j=1}^{r}\int_0^x \frac{\log(e^{t\delta_{A_1}}\cdots e^{t\delta_{A_r}})}{e^{t\delta_{A_1}}\cdots e^{t\delta_{A_r}}-1}\times e^{t\delta_{A_1}}\cdots e^{t\delta_{A_{j-1}}}A_j dt\\ &= \sum_{j=1}^{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^x (1-e^{tA_1}\cdots e^{tA_r})^{n-1}e^{tA_1}\cdots e^{tA_{j-1}}A_j dt. \end{aligned} \tag{12.17}$$

特に，$r = 2$ とおき，$A_1 = A, A_2 = B$ とすると，補遺で述べている結果が次のように得られる[4)]．

$$\begin{aligned}\log(e^A e^B) &= \int_0^1 \frac{\log(e^{t\delta_A}e^{t\delta_B})}{e^{t\delta_A}e^{t\delta_B}-1}e^{t\delta_A}(A+B)dt\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 (1-e^{t\delta_A}e^{t\delta_B})^{n-1}(A+e^{t\delta_A}B)dt\\ &= A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]+\frac{1}{12}[B,[B,A]]+\cdots. \end{aligned} \tag{12.18}$$

## 12.5 BCH 定理（無限次の自由リー代数による線形表現）の量子解析的証明のからくり

前節では, 式の変形をいかにうまく工夫して望みの表式を導くかに頁数を費やした．ここでは，BCH 定理の本質を「Aha! そういうことか！」とわかってもらうため，その量子解析による導出法をまとめ数理的構造を浮き彫りにしよう．

条件式 (12.3) で定義される演算子 $\Phi(x)$ の特徴とその具体的な表式を求めるための量子微分方程式 (12.15) を導く方法の要点をまとめると，図 12.1 のようになる．すなわち，条件式 (12.3) の両辺を $x$ で微分し，量子微分の公式 (12.10) を用いて，それぞれ，もとの演算子関数と内部微分の関数部分（非可換性を表す因子）との積に分解し，共通因子を取り除くと，内部微分だけで表される量

$$\frac{de^{\Phi(x)}}{dx} = e^{\Phi(x)} \times (\delta_{\Phi(x)}\text{ の関数}) \cdot \frac{d\Phi(x)}{dx}$$

$\|$　　　　$\|$　　　　$\Updownarrow$ 式 (12.15)

$$\frac{d}{dx}\left(e^{A_1(x)}\cdots e^{A_r(x)}\right) = e^{A_1(x)}\cdots e^{A_r(x)} \times \sum_{j=1}^{r}(\{\delta_{A_k(x)}\}\text{ の関数}) \cdot \frac{dA_j(x)}{dx}$$

キー等式：$e^{\delta_{\Phi}(x)} = e^{\delta A_1(x)}\cdots e^{\delta A_r(x)}$　$(*)$

図 12.1　指数演算子の量子微分方程式導出のスキーム．等式 $(*)$ の存在（不変形式）が式 (12.15) の成立のキーポイントである．2 重線囲みの左側の内部微分の関数部分が非可換性（量子効果）を表す．

子微分方程式 (12.15) が導かれる．その際に，式 (12.3) から導かれる公式 12.1（すなわち，式 (12.6)）が本質的な役割を果たす．

条件式 (12.3) と式 (12.6) との相対関係（不変形式）がまさに指数演算子の真骨頂を表している．こうして，演算子 $\Phi(x)$ に関する量子微分方程式 (12.15) が導かれる．これを $x$ で積分することにより，$\Phi(x)$ が内部微分 $\{\delta_{A_j(x)}\}$ の関数を演算子 $dA_j(x)/dx$ に作用させた形に表されるという望みの定理が導かれる．

## 12.6 一般化された DSW 定理[4)]

実は，上の一般的な量子解析（量子微分）の活用の過程を見ると，補遺で証明する DSW 定理 (12A.4) は，次のように，より一般的な形に拡張できることが容易にわかる[4)]．

**定理 12.1**（一般化された DSW 定理）　互いに非可換な演算子 $A_1, \cdots, A_r$ で作られる次の形の任意の関数 $S = \sum_k^r f_k(\{A_j\})A_k$ が $\{A_j\}$ の交換子の線形結合（自由リー代数）になるための必要十分条件は

$$S = \sum_k \int_0^1 f_k(\{t\delta_{A_j}\})A_k dt \tag{12.19}$$

である．

**証明**　十分条件であることは，式 (12.19) の右辺が交換子の線形結合であることから明らかである．次に必要条件について考える．$f_k(\{A_j\})$ が $(n-1)$ 次の $\{A_j\}$ の多項式の場合には，$f_k(\{A_j\})A_k$ が $n$ 次多項式になり，DSW 定理の $P_n(\{A_j\})$ に対応する．すなわち，この場合の $S$ を $S_n(\{A_j\})$ と書くと，

$$\begin{aligned}
\text{式 (12.19) の右辺} &= \sum_k \int_0^1 t^{n-1} dt f_k(\{\delta_{A_j}\})A_k \\
&= \frac{1}{n}\sum_k f_k(\{\delta_{A_j}\})A_k = \frac{1}{n}\left\{\sum_k f_k(\{A_j\})A_k\right\}_n \\
&= \frac{1}{n}\{S_n(\{A_j\})\}_n
\end{aligned} \tag{12.20}$$

となり，補遺の条件式 (12A.4) に一致する．ただし，記号 $\{\cdots\}_n$ は (12A.5)

で定義されるので，式 (12.20) の最後から 2 番目の等号は定義そのものである．こうして，

$$S_n(\{A_j\}) = \frac{1}{n}\{S_n(\{A_j\})\}_n \tag{12.21}$$

が導かれ，$n$ 次多項式だけの場合は，式 (12.19) が必要条件であることがわかる．一般に異なる次数の多項式の場合も式 (12.19) の $t$-積分により，うまく正しい因子 $\frac{1}{n}$ を与えるので，一般の $S(\{A_j\})$ に対しても

$$S(\{A_j\}) = \int_0^1 S(\{t\delta_{A_j}\})dt \tag{12.22}$$

が必要条件であることがわかる．

## 12.7 おわりに

今回は，量子微分方程式を中心テーマとして解説し，その有効性を示すため，BCH 定理を再び取り上げた．特に，具体的に解を求める一般的な定式化によっても抽象的な特徴を証明できることを例示した．次回は，多変数演算子関数の量子偏微分を定式化し，量子偏微分方程式を用いて，いろいろな指数積公式を導出する．

## 補遺：BCH 公式の従来の導出法—DSW 定理の活用

すでに第 8 回と第 9 回において[1]，BCH 公式の表式とその本質について一応説明したけれども，今回量子解析，特に量子微分方程式を用いて，本文で BCH 公式を再考した．そこで，この新しい方法が従来の導出法と比べていかに有効であるかを知るために，従来の導出法およびそれに用いられている DSW 定理 (Dynkin–Specht–Wever Theorem)[4,7]をここで解説する．

簡単のために，第 8 回でも導出は省略して結果の表式だけ書き下した BCH 公式 (8.5)，すなわち

$$\log(\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B) = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] + \frac{1}{12}[B,[B,A]] + \cdots \tag{12A.1}$$

の従来の導出法[4,7]を詳しく説明する．

冒頭でも述べた通り，従来の取扱い方では，BCH 公式の本質である "$\log(\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B)$ が $A$ と $B$ の交換子の線形結合で表されるという特徴" を踏まえて，とにかく強引に，式 (12A.1) の左辺を $A$ と $B$ の $n$ 次多項式の形に展開する：

$$\begin{aligned}\log(\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B) &= \log[1 + (\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B - 1)] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B - 1)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\left(1 + A + \frac{A^2}{2} + \cdots\right)\left(1 + B + \frac{B^2}{2} + \cdots\right) - 1\right]^n \\ &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} L_n(A,B).\end{aligned} \tag{12A.2}$$

ただし，

$$L_1(A,B)=A+B,\quad L_2(A,B)=\frac{1}{2}(AB-BA),$$
$$L_3(A,B)=\frac{1}{12}(A^2B+AB^2+BA^2+B^2A-2ABA-2BAB),\cdots \tag{12A.3}$$

のように，$L_n(A,B)$ は $A$ と $B$ の $n$ 次多項式である．上の計算は $L_2(A,B)$ までは簡単であるが，$L_3(A,B)$ になると手計算ではあまりにも面倒になる（数式処理に頼ることになる）．しかも，$L_2(A,B)$ が交換子 $\frac{1}{2}[A,B]$ になることはすぐわかるが，$L_3(A,B)$ が 3 次の交換子の線形結合になることを確かめるのは容易ではない．次数 $n$ が大きくなると，それはますます困難になる．これを少し解消する方法が次の DSW 定理[7]の利用である．

**定理 12.2**（DSW 定理） $P_n(A,B)$ が $A$ と $B$ の $n$ 次の交換子の線形結合であるための必要十分条件は

$$P_n(A,B)=\frac{1}{n}\{P_n(A,B)\}_n \tag{12A.4}$$

が成り立つことである．ただし，記号 $\{\cdots\}_n$ は次式で定義される：

$$\{A_1A_2\cdots A_n\}_n=\delta_{A_1}\{A_2\cdots A_n\}_{n-1}=\delta_{A_1}\delta_{A_2}\cdots\delta_{A_{n-1}}A_n$$
$$=[A_1,[A_2,\cdots[A_{n-1},A_n]\cdots]. \tag{12A.5}$$

また，記号 $\{\cdots\}_n$ は次のような線形性

$$\{P_n(A,B)+Q_n(A,B)\}_n=\{P_n(A,B)\}_n+\{Q_n(A,B)\}_n \tag{12A.6}$$

を持つものとする．

**証明**　式 (12A.4) の右辺は，交換子の線形結合であるから，条件式 (12A.4) は十分条件であることは明らかである．次に，これは必要条件であることを示そう．一般の $n$ 次交換子はすべて，交換子 (12A.5) の線形結合で表されるので，式 (12A.5) が必要条件であることは次の公式から直ちに示される．

**公式 12.4**　一般の正の整数 $n$ に対し，任意の演算子 $\{A_j\}$ に関して次式が成り立つ：

$$\{\{A_1A_2\cdots A_n\}_n\}_n=n\{A_1A_2\cdots A_n\}_n. \tag{12A.7}$$

ただし，$\{A_1A_2\cdots A_n\}_n$ は (12A.5) で定義される．また，$\{\{A\}_1\}_1=\{A\}_1=A$ である．

**証明**　数学的帰納法を用いて証明する．まず，式 (12A.7) が $n-1$ の場合に成り立つと仮定する．このとき，定義式 (12A.5) より，

$$\begin{aligned}\{\{A_1A_2\cdots A_n\}_n\}_n&=\{A_1\{A_2\cdots A_n\}_{n-1}\}_n-\{\{A_2\cdots A_n\}_{n-1}A_1\}_n\\&=\delta_{A_1}\{\{A_2\cdots A_n\}_{n-1}\}_{n-1}-\{\{A_2\cdots A_n\}_{n-1}A_1\}_n\\&=(n-1)\delta_{A_1}\{A_2\cdots A_n\}_{n-1}-\{\{A_2\cdots A_n\}_{n-1}A_1\}_n\\&=(n-1)\{A_1A_2\cdots A_n\}_n-\{\{A_2\cdots A_n\}_{n-1}A_1\}_n\end{aligned} \tag{12A.8}$$

となる．次に，式 (12A.8) の第 2 項を変換する．そのためには，次の表示法に気づくことが本質的である．

**表示法 12.1**　任意の $\{A_j\}$ に対して次の表示ができる：

$$\{\{A_2\cdots A_n\}_{n-1}A_1\}_n=[\delta_{A_2},[\delta_{A_3},\cdots[\delta_{A_{n-1}},\delta_{A_n}]\cdots]A_1. \quad (12A.9)$$

上の表示に現れる超演算子 $\delta_A$ と $\delta_B$ の交換子に対するよく知られた公式

$$[\delta_A,\delta_B]=\delta_{[A,B]} \quad (12A.10)$$

をくり返し用いて，(12A.9) を変形すると，次のようになる：

$$\begin{aligned}\{\{A_2\cdots A_n\}_{n-1}A_1\}_n&=[\delta_{A_2},[\delta_{A_3},\cdots[\delta_{A_{n-2}},\delta_{[A_{n-1},A_n]}]\cdots]A_1\\&=\cdots=\delta_{[A_2,[A_3,\cdots[A_{n-1},A_n]\cdots]}A_1\\&=-\delta_{A_1}[A_2,[A_3,\cdots[A_{n-1},A_n]\cdots]\\&=-\{A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}A_n\}_n \quad (12A.11)\end{aligned}$$

この変換式を式 (12A.8) の第 2 項に代入すると，公式 12.4，すなわち式 (12A.7) が $n$ の場合にも成り立つことがわかる．また，$n=2$ の場合には，

$$\begin{aligned}\{\{A_1A_2\}_2\}_2&=\{[A_1,A_2]\}_2=\{A_1A_2-A_2A_1\}_2\\&=[A_1,A_2]-[A_2,A_1]=2[A_1,A_2]=2\{A_1A_2\}_2 \quad (12A.12)\end{aligned}$$

であることは直ちにわかる．こうして，数学的帰納法で公式 12.4 が証明されたことになる．

上で紹介した DSW 定理を用いると，$\log(\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B)$ は，(12A.2) より，原理的に交換子の線形結合で次のように表せる：

$$\log(\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\{L_n(A,B)\}_n. \quad (12A.13)$$

実際，例えば，

$$\{L_2(A,B)\}_2=\frac{1}{2}(\{A,B\}_2-\{B,A\}_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}([A,B]-[B,A])=\frac{1}{2}[A,B] \quad (12A.14)$$

となり，(12A.1) の 2 次の項と一致することがわかる．高次の項も同様である．これが BCH 公式の従来の面倒な導出法である．

### 参考文献


1) 鈴木増雄，本連載，「数理科学」2015 年 5 月号（第 8 回），6 月号（第 9 回）．
2) M. Suzuki, *Commun. Math. Phys.* **183**, 339 (1997), および本連載，「数理科学」2015 年 8 月号（第 10 回），9 月号（第 11 回）．
3) 鈴木増雄，『統計力学』（岩波書店，2000 年）．
4) M. Suzuki, *J. Math. Phys.* **38**(2), 1183 (1997).
5) M. Suzuki, *Rev. in Math. Phys.* Vol.**11**, No.2, 243 (1999).
6) 鈴木増雄，『変分原理と物理学』（丸善出版，2015 年）．
7) W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, *Combinatorial group theory* (Dover, New York, 1976).


（すずき・ますお，東京大学名誉教授）

# 経路積分と量子解析

いかにして量子現象を数理的に扱うか

# 第13回

## 量子解析(4)

### 多変数演算子関数の量子偏微分とその応用

鈴木 増雄

## 13.1 はじめに

今までは，主として 1 変数演算子関数の量子微分とその応用について解説してきた．前回扱った指数積の場合は，多変数ではあるが指数関数の特殊性の由に，取扱いは実質的に 1 変数の量子微分と同じであった[1~3]．ここでは，一般の多変数演算子関数に対する量子偏微分を定式化する．それを用いて，量子偏微分方程式を導入し，指数積公式を再考する．さらに，くり込まれた BCH 公式についても説明する．

## 13.2 量子偏微分—多変数関数への拡張

まず，1 変数関数の量子微分の復習から始めよう[1~5]．ガトウ微分 $df(A)$ と量子微分 $df(A)/dA$ は次式で定義されるのだった[1~5]：

$$df(A) = \lim_{h\to 0} \frac{f(A+hdA)-f(A)}{h} \equiv \frac{df(A)}{dA}\cdot dA. \tag{13.1}$$

図 13.1 にまとめた通り，量子微分 $df(A)/dA$ は互いに可換な $A$ と内部微分 $\delta_A$ を用いて表され，通常の数のように扱うことができるので大変便利である（ただし，内部微分 $\delta_A$ は任意の演算子 $Q$ に対して $\delta_A Q \equiv [A, Q] \equiv AQ - QA$ で定義される）．特に，積分形は古典的な微分 $f^{(1)}(x) \equiv df(x)/dx$ との対応が明瞭であり，高階量子微分への拡張が容易な形をしている[1~5]．

同様に，多変数関数 $f(A_1, A_2, \cdots, A_r)$ に対するガトウ微分と量子偏微分は次式で定義される[4)]：

**量子微分** $\dfrac{df(A(x))}{dx} = \dfrac{df(A(x))}{dA(x)}\dfrac{dA(x)}{dx};\ df(A) = \dfrac{df(A)}{dA}\cdot dA,$

$$\frac{df(A)}{dA} = \frac{\delta_{f(A)}}{\delta_A} = \frac{f(A)-f(A-\delta_A)}{\delta_A} = \int_0^1 f^{(1)}(A-t\delta_A)dt$$

⇓ 多変数関数へ拡張

**量子偏微分** $\dfrac{df(\{A_k(x)\})}{dx} = \displaystyle\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial f(\{A_k(x)\})}{\partial A_j(x)}\cdot\frac{dA_j(x)}{dx}$

$$\frac{\partial}{\partial A_j}(f_1(A_1)\cdots f_j(A_j)\cdots f_r(A_r)) = f_1(A_1)\cdots f_{j-1}(A_{j-1})f_r(A_r-\delta_{A_r}) \times\cdots f_{j+1}(A_{j+1}-\delta_{A_{j+1}})\frac{d}{dA_j}f_j(A_j)$$

同じ変数が重複して現れる積の場合も同様に拡張できる．さらに一般の関数 $f(A_1, A_2, \cdots, A_r)$ の場合は，積の関数の和に分解して，上の公式を用いる．こうして，

$$df(A_1,\cdots,A_r) = \sum_{j=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial A_j}dA_j$$

がわかる．

図 13.1 量子微分を量子偏微分に拡張する定式化．

$$df(\{A_k\}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\{A_k+hdA_k\})-f(\{A_k\})}{h} \equiv \sum_j \frac{\partial f(\{A_k\})}{\partial A_j}dA_j. \tag{13.2}$$

演算子 $\{A_k\}$ がパラメータ $x$ の関数のときには，上式は

$$\frac{df(\{A_k(x)\})}{dx} = \sum_j \frac{\partial f(\{A_k(x)\})}{\partial A_j(x)}\cdot\frac{dA_j(x)}{dx} \tag{13.3}$$

と書ける[4]．ここで，量子偏微分 $\partial f/\partial A_j$ の具体的な表式は，図 13.1 に示す通り，1 変数の場合に比べて，かなり複雑になる．その理由は $A_k$ と内部微分 $\delta_{A_j}$ が $j \neq k$ のとき互いに非可換なことである．このことに注意しながら，量子偏微分の具体的な表式を導出することにしよう．

微分は線形の操作であるから，扱い易い関数形をベースにして，一般の多変数関数をそれらの線形結合（和）で表し量子偏微分を施すことにする．まず，積の関数の微分を考える：

$$\frac{d}{dx}\big(f_1(A_1(x))\cdots f_r(A_r(x))\big) = \sum_j f_1(A_1(x))\cdots f_{j-1}(A_{j-1}(x))\frac{df_j(A_j(x))}{dx}f_{j+1}(A_{j+1}(x))\cdots f_r(A_r(x)). \tag{13.4}$$

量子偏微分の表式を求めるには，上式の右辺の途中にある微分式 $df_j(A_j(x))/dx$ を一番右側に移動させる必要がある．しかし，その中にある $A_j(x)$ や内部微分 $\delta_{A_j(x)}$ は他の $A_k(x)$ や $\delta_{A_k(x)}$ $(k \neq j)$ と非可換であるから，次のような工夫をして，これを実行しよう．

まず，1 変数のときには，次の公式が成り立つことに注意する[4]．

**公式 13.1**　任意の演算子関数 $f(A)$ と任意の演算子 $Q$ に対して次式が成り立つ：

$$Qf(A) = f(A - \delta_A)Q. \tag{13.5}$$

これを一般の $n$ 個の積の関数 $f_1(A_1)\cdots f_n(A_n)$ に拡張しよう．その際に注意すべきことは，「超演算子」である内部微分 $\delta_{A_1}, \cdots, \delta_{A_n}$ は右側にある全体の演算子に作用し，それとの交換子を作るということである．ここが量子解析を正しく実行するための急所の一つである．まず，公式 13.1 を 1 回用いると，

$$Qf_1(A_1)f_2(A_2)\cdots f_n(A_n) = (f_1(A_1 - \delta_{A_1})Q)f_2(A_2)\cdots f_n(A_n) \tag{13.6}$$

となる．ここで，再び公式 13.1 を用いて $Q$ を右側に移したい（ここで迂闊に式 (13.6) の右辺の $(f_1(A_1 - \delta_{A_1})Q)$ の外側のカッコを忘れて，$Q$ と $f_2$ との積とみなして公式 13.1 を適用すると，とんでもない間違いとなる）．これに留意して，1 つのまとまった演算子である "$(f_1(A_1 - \delta_{A_1})Q)$" 全体を公式 13.1 の $Q$ とみなして，$f_2(A_2)$ の右側に次のように移動させる：

$$\big(f_1(A_1 - \delta_{A_1})Q\big)f_2(A_2) = f_2(A_2 - \delta_{A_2})f_1(A_1 - \delta_{A_1})Q. \tag{13.7}$$

この操作を順次くり返して $Q$ が一番右側に来るようにすると，次の公式が得られる．

**公式 13.2**　演算子 $A_1, \cdots, A_n$ の任意の演算子関数列 $\{f_j(A_j)\}$ の積 $f_1(A_1)\cdots f_n(A_n)$ と任意の演算子 $Q$ に対して，次式が成り立つ：

$$\begin{aligned} &Qf_1(A_1)f_2(A_2)\cdots f_n(A_n) \\ &= f_n(A_n - \delta_{A_n})f_{n-1}(A_{n-1} - \delta_{A_{n-1}})\cdots f_2(A_2 - \delta_{A_2})f_1(A_1 - \delta_{A_1})Q. \end{aligned} \tag{13.8}$$

この大変便利な公式を用いて式 (13.4) を変形し，さらに公式

$$\frac{df(A(x))}{dx} = \frac{df(A(x))}{dA(x)} \cdot \frac{dA(x)}{dx} \tag{13.9}$$

を考慮すると積の関数の偏微分の表式が図 13.1 の中にあるような形に求まる．すなわち，次の公式が得られる．

**公式 13.3**　任意の演算子関数列 $\{f_j(A_j)\}$ に対して，その積の量子偏微分は次式で与えられる：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial A_j}(f_1(A_1)\cdots f_r(A_r)) \\ &= f_1(A_1)\cdots f_{j-1}(A_{j-1})f_r(A_r - \delta_{A_r})\cdots f_{j+1}(A_{j+1} - \delta_{A_{j+1}})\frac{d}{dA_j}f_j(A_j). \end{aligned} \tag{13.10}$$

より一般の演算子関数 $f(A_1, A_2, \cdots, A_r)$ の量子偏微分はその関数を上の積

の関数の和に分解して，公式 13.3 を用いればよい．また，同じ変数がとびとびに積の中に現れる場合にも，公式 13.2，したがって公式 13.3 を拡張するのは容易である．

## 13.3 指数演算子に関する量子偏微分の分離積公式の再考

前節の量子偏微分の公式 13.3 は極めて一般的である．そこで，前回議論した指数演算子の場合に公式 13.3 を適用してみると，前回求めたような美しい形（$\{A_j\}$ と $\{\delta_{A_j}\}$ の関数の積に分離すること）にはならない．それは，一般の量子偏微分の公式 13.3 の定式化では，公式の適用範囲を広げるため，$\{A_j\}$ と $\{\delta_{A_j}\}$ が互いに入り混じった形で満足したからである．

それに対して，$f(x) = \mathrm{e}^x$（指数関数）の場合は

$$f(A - \delta_A) = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^{-\delta_A} \tag{13.11}$$

のように $A$ の部分と $\delta_A$ の関数が積に分離する．量子偏微分の場合にも，式 (13.6) まで変換したとき，$f_1(A_1 - \delta_{A_1})$ を $\mathrm{e}^{A_1}$ と $\mathrm{e}^{-\delta_{A_1}}$ の積に分離し，$\mathrm{e}^{A_1}$ はそのままにして，$\mathrm{e}^{-\delta_{A_1}}Q$ のみ $f_2(A_2) = \mathrm{e}^{A_2}$ の右側に移す：

$$\begin{aligned} Qf_1(A_1)f_2(A_2) &= \mathrm{e}^{A_1}(\mathrm{e}^{-\delta_{A_1}}Q)f_2(A_2) = \mathrm{e}^{A_1} f_2(A_2 - \delta_{A_2})(\mathrm{e}^{-\delta_{A_1}}Q) \\ &= \mathrm{e}^{A_1}\mathrm{e}^{A_2}(\mathrm{e}^{-\delta_{A_2}}\mathrm{e}^{-\delta_{A_1}}Q). \end{aligned} \tag{13.12}$$

この手順をくり返すと，前回求めた公式（分離形）に達する：

$$Q\mathrm{e}^{A_1}\cdots\mathrm{e}^{A_n} = (\mathrm{e}^{A_1}\cdots\mathrm{e}^{A_n})(\mathrm{e}^{-\delta_{A_n}}\cdots\mathrm{e}^{-\delta_{A_1}}Q) \tag{13.13}$$

（この公式は前回のように公式 $\mathrm{e}^{-\delta_A}Q = \mathrm{e}^{-A}Q\mathrm{e}^A$ を用いて直接変形したほうが手取り早い）．こうして，指数演算子の積の量子微分方程式は積分し易い形になる（式 (12.4) 参照）[1~5]．

## 13.4 量子全微分，全微分方程式およびその量子解

通常の多変数関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ の全微分 $df$ は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \equiv f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n \tag{13.14}$$

によって定義される．このとき，次のコーシー・リーマンの条件式が成り立つ[4)]：

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}f = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}f = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}. \tag{13.15}$$

この条件は $\partial f_j/\partial x_k$ と $\partial f_k/\partial x_j$ が共に連続であれば成り立つ．これは，逆に，式 (13.14) の最右辺 $f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ が全微分 $df$ になるための必要十分条件である．

この理論は多変数演算子関数にも拡張できる．今，演算子 $A_1, \cdots, A_n$ がそれぞれパラメータ $t_1, \cdots, t_n$ の関数であるとする：

$$A_1 = A_1(t_1), \cdots, A_n = A_n(t_n). \tag{13.16}$$

このとき，多変数演算子関数 $f = f(A_1(t_1), A_2(t_2), \cdots, A_n(t_n))$ の量子全微分 $df$ は

$$
\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial t_1}dt_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial t_n}dt_n \\
&= \frac{\partial f}{\partial A_1(t_1)}\frac{dA_1(t_1)}{dt_1}dt_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial A_n(t_n)}\frac{dA_n(t_n)}{dt_n}dt_n \\
&\equiv f_1 dA_1 + \cdots + f_n dA_n
\end{aligned}
\tag{13.17}
$$

と表せる．ただし，

$$
f_j = \frac{\partial f}{\partial A_j} \quad \text{および} \quad dA_j = \frac{dA_j(t_j)}{dt_j}dt_j \tag{13.18}
$$

である．

さて，通常の関数の場合と同様に，多変数演算子関数 $\{g_k(\{A_j(t_j)\}); k = 1, 2, \cdots, n\}$ が与えられたとき，量子微分方程式

$$
g_1 dt_1 + \cdots + g_n dt_n = 0 \tag{13.19}
$$

を考える．この量子微分方程式が量子全微分方程式になるとは限らない．そこで，量子積分因子 $h(\{A_j(t_j)\})$ をかけて

$$
df = h(g_1 dt_1 + \cdots + g_n dt_n) \tag{13.20}
$$

のような量子全微分 $df$ を作ることを考える．この $df$ が存在するための条件は，明らかに，

$$
\frac{\partial}{\partial t_j}(hg_k) = \frac{\partial}{\partial t_k}(hg_j) \tag{13.21}
$$

である．この条件の下で量子積分因子 $h$ を求め，もとの $\{g_k\}$ に $h$ をかけた $\{hg_k\}$ を改めて $\{g_k\}$ とおいて，量子全微分方程式

$$
df = g_1 dt_1 + \cdots + g_n dt_n = 0 \tag{13.22}
$$

を考える．この解は，通常の関数の場合と形式的には同じになり，

$$
f = c \quad \text{（定数演算子）} \tag{13.23}
$$

で与えられる．ただし，量子積分関数 $f$ は，$\{t_k\}$ の初期値を $\{t_k^0\}$ とおいて，

$$
f = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_k^0}^{t_k} g_k(A_1(t_1), \cdots, A_k(t_k'), A_{k+1}(t_{k+1}^0), \cdots, A_n(t_n^0))dt_k' \tag{13.24}
$$

で与えられる[4)]．積分条件式

$$
\frac{\partial}{\partial t_j}g_k = \frac{\partial}{\partial t_k}g_j \tag{13.25}
$$

を用いて，式 (13.22) の第 1 等号が成り立つことが一般的に証明できる．ここでは，簡単のために，$n = 2$ の場合に，量子全微分方程式

$$
df = g ds + h dt \tag{13.26}
$$

を扱うことにする．パラメータ依存性を明示して，$g = g(s, t), h = h(s, t)$ と書

くと，積分 $f$ は

$$f = \int_{s_0}^{s} g(s', t_0) ds' + \int_{t_0}^{t} h(s, t') dt' \tag{13.27}$$

と書ける．この $s$ と $t$ の偏微分をとると，

$$\frac{\partial f}{\partial s} = g(s, t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial s} h(s, t') dt' \tag{13.28}$$

となり，積分条件式 (13.25) を用いて上式右辺の第 2 項を積分すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= g(s, t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t'} g(s, t') dt' \\ &= g(s, t_0) + g(s, t) - g(s, t_0) = g(s, t) \end{aligned} \tag{13.29}$$

となる．同様に，

$$\frac{\partial f}{\partial t} = h(s, t) \tag{13.30}$$

となる．したがって，式 (13.27) で与えられる関数 $f$ は，式 (13.26) の積分になっている．一般の $n$ の場合も同様にして，

$$\frac{\partial f}{\partial t_k} = g_k(A_1(t_1), \cdots, A_n(t_n)) \tag{13.31}$$

が示せる．したがって，式 (13.26) で与えられる $f$ は量子全微分方程式 (13.22) の量子積分関数になっていることが証明される[4)]．

## 13.5 多変数演算子関数の量子テーラー展開[4)]

互いに非可換な演算子 $\{A_k\}$ と $\{B_k\}$ の関数 $f(\{A_k + x_k B_k\})$ の $\{x_k\}$ に関するテーラー展開は，形式的には通常の関数と同様に，

$$f(\{A_k + x_k B_k\}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}}{m_1! \cdots m_n!} \left( \frac{\partial^m f(\{A_k + x_k B_k\})}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}} \right)_{\{x_k = 0\}} \tag{13.32}$$

と表せる．ただし，整数の組 $\{m_k\}$ は $m_1 + \cdots + m_n = m$ をみたす．1 変数の場合と違い，式 (13.32) の展開係数は一般に複雑過ぎてあまり実用的ではない[4)]ので，ここではこれ以上深入りしないことにする．

## 13.6 くり込まれた BCH 公式

応用上は，2 つの指数演算子 $e^A$ と $e^B$ の積を 1 つの指数演算子 $e^{\Phi}$ の形にまとめるとき一方の演算子 $A$ は $\Phi$ に無限次まで取り込む（くり込む）ことが必要になる場合がある[5)]．すなわち，

$$e^A e^{\varepsilon B} = e^{\Phi(\varepsilon)} \tag{13.33}$$

とおいて，$\Phi(\varepsilon)$ を $\varepsilon$ のべきで展開する：

$$\Phi(\varepsilon) = A + R(\varepsilon); \ R(\varepsilon) = \varepsilon R_1 + \varepsilon^2 R_2 + \cdots . \tag{13.34}$$

演算子 $R(\varepsilon)$ を求めるために，$R(\varepsilon)$ に関する微分方程式を作る．そのために，式 (13.33) の両辺を $\varepsilon$ で微分する．関係式 $\Phi(\varepsilon)=A+R(\varepsilon)$ を用いると，

$$\mathrm{e}^{\Phi(\varepsilon)}\Delta(-\Phi(\varepsilon))\frac{dR(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{\varepsilon B}B=\mathrm{e}^{\Phi(\varepsilon)}B \tag{13.35}$$

が得られる[5)]．ただし，$\Delta(A)$ は

$$\Delta(A)=\frac{\mathrm{e}^{\delta_A}-1}{\delta_A} \tag{13.36}$$

で定義される[3, 4)]．また，次の公式[3, 4)]を用いた：

$$\frac{d\mathrm{e}^{\Phi}}{d\Phi}=\mathrm{e}^{\Phi}\Delta(-\Phi)=\mathrm{e}^{\Phi}\mathrm{e}^{-\delta_\Phi}\Delta(\Phi). \tag{13.37}$$

こうして，$R(\varepsilon)$ に関する量子微分方程式

$$\frac{d}{d\varepsilon}R(\varepsilon)=\frac{\delta_{\Phi(\varepsilon)}}{\exp(\delta_{\Phi(\varepsilon)})-1}\mathrm{e}^{\delta_{\Phi(\varepsilon)}}B=\frac{\log(\mathrm{e}^{\delta_A}\mathrm{e}^{\varepsilon\delta_B})}{\mathrm{e}^{\delta_A}\mathrm{e}^{\varepsilon\delta_B}-1}\mathrm{e}^{\delta_A}B \tag{13.38}$$

が得られる[4, 5)]．ここで式 (13.33) から導かれる次の関係式を用いた：

$$\mathrm{e}^{\delta_{\Phi(\varepsilon)}}=\mathrm{e}^{\delta_A}\mathrm{e}^{\varepsilon\delta_B};\quad \mathrm{e}^{\delta_A}Q=\mathrm{e}^{A}Q\mathrm{e}^{-A}, \tag{13.39}$$

および $\exp(\varepsilon\delta_B)B=B$．微分方程式 (13.38) を積分すると，初期条件 $R(0)=0$ を用いて，

$$R(\varepsilon)=\int_0^{\varepsilon}\frac{\log(\mathrm{e}^{\delta_A}\mathrm{e}^{t\delta_B})}{\mathrm{e}^{\delta_A}\mathrm{e}^{t\delta_B}-1}dt\mathrm{e}^{\delta_A}B \tag{13.40}$$

となる[4, 5)]．特に，$R(\varepsilon)$ の 1 次の項 $R_1$ は

$$R_1=\frac{\delta_A}{1-\mathrm{e}^{-\delta_A}}B=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B_n\delta_A^nB \tag{13.41}$$

と与えられる[4, 5)]．ただし，$\{B_n\}$ は次のようなベルヌーイ数である：

$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ B_8=-\frac{1}{30},\ B_{10}=\frac{5}{66},$$
$$B_{12}=-\frac{691}{2730},\ B_{14}=\frac{7}{6},\ B_{16}=-\frac{3617}{510},\cdots;B_{2n+1}=0\quad(n\geq 1). \tag{13.42}$$

このように，くり込まれた BCH 公式にベルヌーイ数が現れるのは，指数演算子の量子微分 (13.37) に非可換性を表す因子 (13.36) がつくからであり，数学の奥深さを感じさせる．内部微分 $\delta_A$ に関する関係式

$$\delta_A^n\cdot B=\underbrace{[A,[A,\cdots[A}_{n},B]\cdots] \tag{13.43}$$

を用いると，より具体的に $R_1$ は次のような交換子の線形結合で表される[5, 6)]：

$$R_1=B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]+\cdots. \tag{13.44}$$

式 (13.41) からもわかるように，演算子 $A$ の効果は無限次まで正確に取り込まれている．

さらに，$R(\varepsilon)$ の高次まで具体的に計算するには，第 11 回で説明したレゾルベント展開 (11.22) や対数演算子関数 $\log(A+xB)$ の量子テーラー展開 (11.38)

が役立つ．すなわち，

$$L_0 = \mathrm{e}^{\delta_A}, \quad L_\varepsilon = \mathrm{e}^{\delta_A}(\mathrm{e}^{\varepsilon\delta_B} - 1) \tag{13.45}$$

とおいて，$R(\varepsilon)$ は

$$\begin{aligned}
R(\varepsilon) &= \int_0^\varepsilon dt \frac{\log(L_0 + L_t)}{(L_0 - 1) + L_t} L_0 B \\
&= \int_0^\varepsilon dt \int_0^\infty ds \left( \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s + L_0 + L_t} \right) \\
&\quad \times \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{L_0 - 1} \left( -L_t \frac{1}{L_0 - 1} \right)^n L_0 B \\
&= \int_0^\varepsilon dt \left( \log L_0 - \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty ds \frac{1}{L_0 + s} \left( -L_t \frac{1}{L_0 + s} \right)^n \right) \\
&\quad \times \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{L_0 - 1} \left( -L_t \frac{1}{L_0 - 1} \right)^n L_0 B
\end{aligned} \tag{13.46}$$

と表され，具体的な計算手順が示される．例えば，$R(\varepsilon)$ の 2 次の項 $R_2$ は，

$$R_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{\delta_A}{\mathrm{e}^{\delta_A} - 1} \mathrm{e}^{\delta_A} \delta_B - \int_0^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^{\delta_A} + s} \mathrm{e}^{\delta_A} \delta_B \frac{1}{\mathrm{e}^{\delta_A} + s} ds \right) \frac{\mathrm{e}^{\delta_A}}{\mathrm{e}^{\delta_A} - 1} B \tag{13.47}$$

と求まる．

このように，くり込まれたBCH 公式の定式化では，対数演算子関数などの量子テーラー展開公式が有効に利用されることがわかり，大変興味深い．

## 13.7 おわりに

今回は，多変数演算子の関数について，量子偏微分を導入し，量子偏微分方程式，特に量子全微分方程式の定式化を行い，その解について説明した．また，くり込まれたBCH 公式についても詳しく説明し，量子テーラー展開の有効性を示した．次回は，さらに量子汎関数微分とその物理への応用などについて説明する．

### 参考文献


1) 鈴木増雄，本連載第 10 回，「数理科学」2015 年 8 月号．
2) 鈴木増雄，本連載第 11 回，「数理科学」9 月号．
3) 鈴木増雄，本連載第 12 回，「数理科学」11 月号．
4) M. Suzuki, *Commun. Math. Phys.* **183**, 339 (1997).
5) M. Suzuki, *J. Math. Phys.* **38** (2), 1183 (1997).
6) R.I. McLachlan, *BIT.* **35** (2), 258 (1995).


（すずき・ますお，東京大学名誉教授）